Probabilités

Vocabulaire Une *probabilité* P sur un ensemble fini Ω (appelé *univers* ou *ensemble des possibles* ou *ensemble des éventualités* ou *ensemble des événements élémentaires* est une application de l'ensemble des parties de Ω dans $[0;1]$. Un *événement* est une partie (ou un sous-ensemble, c'est la même chose) de Ω.

Principe fondamental Si $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sont tous les événements élémentaires possibles, on *doit* avoir :

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$$

Cette égalité sert souvent dans les exercices à trouver une probabilité manquante.

Evénement certain C'est Ω. On a $P(\Omega) = 1$.

Evénement impossible C'est $\emptyset$. On a $P(\emptyset) = 0$.

Pour tout événement A, on doit avoir $0 \leq P(A) \leq 1$.

Equiprobabilité Si tous les événements élémentaires sont équiprobables (c'est à dire qu'ils ont la même probabilité - ou la même chance de se réaliser - ce qui est le cas, par exemple, avec un dé non truqué), on peut appliquer la formule :

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables à A}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

Evénements contraires Si $\overline{A}$ est le contraire de A, alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Formule fondamentale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Evénements incompatibles Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *incompatibles* (c'est à dire qu'ils ne peuvent pas se produire ensemble). Dans ce cas (et seulement dans ce cas), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car $P(A \cap B) = 0$.

Truc pratique Il ne faut pas hésiter à associer mentalement OU, $\cup$ et $+$

Variable aléatoire Une variable aléatoire réelle X (ou alea numérique) est un résultat chiffré associé à une épreuve. *Exemple* : on jette 3 fois une pièce. Il y a $card\ \Omega = 2^3 = 8$ cas possibles. Si face sort, on gagne 1 ; si pile sort, on perd 1. $X(\Omega) = \{-3; -1; 1; 3\}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ $(x_i \in \mathbb{R})$. La loi de probabilité de X est la donnée des couples (x_i, p_i) où $p_i = P(X = x_i)$. On la présente en général sous forme de tableau et on a $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i				

Espérance mathématique $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. C'est la valeur moyenne que l'on peut espérer de X sur un grand nombre d'épreuves. Si $E(X) = 0$, on dit que X est *centrée*, ou que le jeu est *équitable*.

Variance $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$ (*moyenne des carrés moins carré de la moyenne*). On dit aussi « écart quadratique moyen ». C'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (on démontre en effet que $V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i$). Plus $V(X)$ est grand et plus les valeurs de X sont dispersées autour de $E(X)$.

Ecart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. L'écart-type mesure le rayon de l'intervalle de centre $E(X)$ dans lequel se trouvent la plupart des x_i.